SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON UTILIZANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS TIPO MESHLESS

POISSON EQUATION SOLUTION USING MESHLESS FINITE DIFFERENCE METHOD

Daniel Ricardo Izquierdo[1]

[1] Físico, Magister en Ciencias de la Computación y Matemáticas Computacionales U.S.P. Universidad de Ciencias Aplicadas y Ambientales U.D.C.A Facultad de Ciencias y Tecnología U.D.C.A Campus Universitario: Calle 222 No.55-37 e-mail: dizquierdo@udca.edu.co

RESUMEN

La ecuación de Poisson utilizada ampliamente en electrostática, ingeniería mecánica y física teórica. Es usada para describir los campos de energía potencial causados por distribuciones de cargas o masa. En este trabajo se soluciona esta ecuación utilizando el Método de Diferencias Finitas de tipo meshless, empleando mallas no estructuradas como soporte. La ventaja de este nuevo esquema está en permitir solucionar la ecuación de Poisson en dominios tanto regulares como irregulares, demostrándose su convergencia bajo condiciones de frontera de Dirichlet. Este método está basado en la aproximación local por mínimos cuadrados a partir de los nodos dispersos sobre un dominio.

Palabras clave: Método de Diferencias Finitas, Ecuaciones diferenciales parciales, Métodos Meshless. Ecuación de Poisson.

SUMMARY

The Poisson equation with broad utility in electrostatic, mechanical engineering and theoretical physics. It's used to describe the potential energy field caused by distributions of a given charge or mass. In this paper we solve this equation using the method of finite differences of type meshless, using unstructured meshes as support. The advantage of this new scheme is to allow solving the Poisson equation in both regular and irregular domains, demonstrating its convergence under boundary conditions of Dirichlet. This method is based on the local approximation by least-squares from the nodes scattered about a domain.

Key words: Difference Finite Method, Partial Difference Equations, Meshless Methods, Poisson Equation.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo es utilizada la definición dada por Belytschko *et al.* (1996), en la cual se define que un método numérico es considerado meshless si las bases de aproximación son construidas a partir de un suporte arbitrario generado por una colección de nodos distribuidos irregularmente. Una interesante característica de los métodos meshless es su facilidad de adaptación a espacios arbitrarios, y una flexibilidad de implementación a esquemas adaptativos. Los métodos meshless pueden ser divididos en dos categorías: los métodos basados en principios variacionales y métodos que actúan directamente en las ecuaciones diferenciales.

En la primera categoría se tienen los siguientes métodos: Smooth Particle Hydrodinamics (SPH), (Gingold & Monaghan, 1977), (Monaghan, 1988); Diffuse Element Methods (DEN) (Nayroles *et al.*,1992); Element Free Galerkin (EFG), (Belytschko *et al.*,1996); Reproducing Kernel Particle (RKP), (Liu *et al.*,1995); h-p Cloud Method (Duarte & Oden, 1996); Partition of Unit Finite Elenent Method (PUFEN), (Babuska & Melenk, 1997); Meshless Local Petro-Galerkin (MLPG) y Local Boundary Integral Equation (LBIE), (Atluri & Zhu, 1998). Tales métodos tienen como característica común la utilización una integración numérica para el establecimiento de ecuaciones discretas del sistema. La Integración numérica tiene efectos sobre la precisión y convergencia de las soluciones de estos métodos meshless, ya que se presentan dificultades de cálculo debido la complejidad de las funciones empleadas al hacer difícil el escoger el orden de integración con todos los factores considerados. De esta manera, un bajo orden de la solución en la integración genera una baja la precisión, mientras una integración de orden alto aumenta excesivamente el costo computacional.

En una segunda categoría de métodos meshless, se tiene el métodos de Diferencias Finitas en la cuales un conjunto de ecuaciones discretas son establecidas directamente a partir de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). Bajo este esquema, el Método de Diferencias Finitas tipo Meshless (MDFM) es desarrollado a partir del método de aproximación por Mínimos Cuadrados Localizados (MCL) presentado por Sherpard (1968) como un método tipo meshless, que proporciona una alternativa a las interpolaciones clásicas de funciones a partir de sus valores dados en una serie de puntos distribuidos irregularmente sobre el dominio. En las últimas décadas, los métodos tipo Meshless para la solución numérica de ecuaciones diferenciales han recibido un gran protagonismo, especialmente en la ingeniería mecánica, los cuales proporcionan una aproximación numérica a partir de un conjunto de puntos que pueden tener como soporte una malla estructurada o no estructurada. Una ventaja de este método está en la no utilización de integraciones numéricas. La idea de utilizar nodos ubicados irregularmente en un dominio para la obtención de aproximación en las diferencias finitas no es nueva. Jensen (1972) presenta un método de diferencias finitas el cual utiliza células irregulares con seis vértices. Utilizando una expresión de series de Taylor, él obtiene una fórmula de diferencias finitas la cual aproxima derivadas hasta de segundo. La principal desventaja de este método es que presenta frecuentes singularidades o mal condicionamiento de la célula. Perrone & Kao (1975) sugieren una adición de más nodos en la célula y la aplicación de una media para la generación de coeficientes en las diferencias finitas. Liszka & Orkisz (1980) realizaron una interesante contribución al desarrollo del método en lo que refiere a la selección de células en un intento de eliminar los problemas indicados anteriormente, aplicando el método en la solución problemas lineales y no-lineales. En trabajos como los de Luo & Hüssler (2002), Benito *et al*. (2001), Marshall & Grand (1997), y Glossler (2001) se hace uso del método en la construcción de esquemas de diferencias finitas, expandiendo sus aplicaciones para la solución de diferentes problemas. A pesar de las ventajas ofrecidas por este método, como su facilidad de implementación, flexibilidad y bajo costo, esta categoría de métodos meshless han recibido poca receptibilidad respecto de los métodos variacionales de la primera categoría.

Aunque un MDFM es un método meshless, el uso de mallas (estructuradas o no estructuradas) como soporte de estos nodos permite garantizar una mejor distribución espacial sobre el dominio con relaciones de vecindad entre ellas. En este documento se estudia la convergencia presentado por el MDFM en la solución de la ecuación de Poisson, empleando mallas no estructuradas para representar el dominio del problema. Para esto es presentado un análisis del error y consistencia del método, dependiendo de las cualidades topológicas asociadas a las mallas de los nodos utilizados.

MATERIALES Y MÉTODOS

Célula computacional

Dada una malla *G(V)* que descompone un dominio $D \subset \mathbb{R}^d$, generada a partir de un conjunto de vértices $V = \{v_{1,\dots}, v_m\}$, cada vértice $v_i \in V$ tendrá asociada una célula computacional C_i, como un subconjunto de vértices de utilizados para discretizar la EDP en v_i. En este trabajo $G(v)$ es una malla triangular no estructurada, donde cada vértice de la célula C_i comparte una arista con $v_i \in V$ (figura 1).

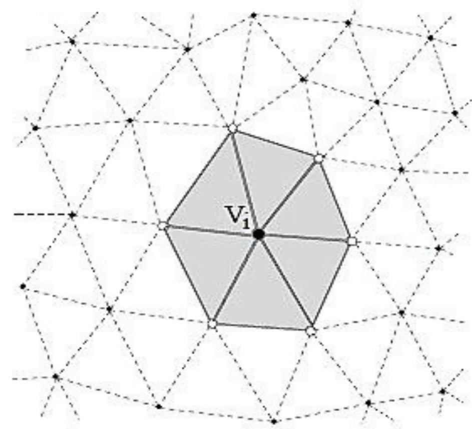

Figura 1: Célula computacional.

Se define un radio asociado a la célula computacional de C_i, denotado por ρ_i, como la mínima distancia entre v_i y todos los $v_k \in C_i$; y la densidad de malla como h= $\min\{\rho_i | v_i \in V\}$. El valor h como un parámetro característico de la densidad de la malla, es proporcionado como en mucho de los algoritmos de generación, como condición inicial de entrada.

Polinomios de aproximación

El MDFG calcula una aproximación discreta de las EDP en una serie de vértices sobre un dominio D a partir de un polinomio de aproximación W, el cuál es calculado utilizando el método de mínimos cuadrados. Sea $\mathcal{P}_s^d$ es un espacio de los polinomios de grados d-dimensional (d variables) que generan a W, cuyas bases están compuestas por los monomios $P^{(1)}$, $P^{(2)}, \dots, P^{(n)}$. Para un vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, \quad x^2, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$. Cada monomio $P^{(i)}$ puede ser escrito como $P^{(i)} = P^{(i)}(\boldsymbol{r}) = (x^1)^{\mu_1(i)}(x^2)^{\mu_2(i)} \dots (x^d)^{\mu_d(i)}$, donde $\mu_1(i) + \mu_2(i) + \dots + \mu_d(i) = r$, son números naturales no negativos. Por facilidad, cada uno de los monomios base $P^{(i)}$ puede ser asociado a un vector de coordenadas $p_i = p_i\left(\mu_1(i), \mu_2(i), \dots, \mu_d(i)\right) \in \mathbb{N}^d$

. Así, se puede asociar cada uno de los monomios base r a partir de los puntos análogos que están en el plano $\mu_1(i) + \mu_2(i) + \ldots + \mu_d(i) = r$, en el espacio $\mathbb{N}^d$. Si $\mathcal{P}_s^d$ tiene una base compuesta por todos los monomios con grado igual o menor a s, entonces se dice que $\mathcal{P}_s^d$ es un espacio polinomial completo.

Diferencias Finitas tipo Meshless

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función de clase C^P y $G(V)$ una descomposición simplicial de D. Sea v_0 un vértice de $G(V)$ posicionado en r_0 y C_0 la célula computacional asociada a v_0. Se considera un sistema de coordenadas local propio de dado por $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = (x^1 - x_0^1, x^2 - x_0^2, \ldots, x^d - x_0^d)$. En este sistema de coordenadas local puede ser aproximado en la vecindad de con una función polinomial $\tilde{f}_0(\tilde{\boldsymbol{r}})$, tal que $\tilde{f}_0 = W_0(\tilde{\boldsymbol{r}})$, donde $W_0 \in \mathcal{P}_s^d$.. Los monomios de la base de $\mathcal{P}_s^d$ de grado1 pueden ser definidos en relación a v_0 por $P^{(i)} = P^{(i)}(\tilde{\boldsymbol{r}}) = (x^i - x_0^i)$,, para i =1, ..., d; y utilizando el Lema 2, los demás elementos de la base son obtenidos. Por lo tanto, un polinomio de aproximación es dado por $W_0(\tilde{\boldsymbol{r}}) = c_0 P^{(0)} + c_1 P^{(1)} + \ldots + c_n P^{(n)}$, con $n = \dim \mathcal{P}_s^d$. Cuando $\tilde{\boldsymbol{r}} = 0$ se obtiene $W_0 = c_0 P^{(0)} = c_0$,, por lo tanto, para asegurar una aproximación con la función $f(\boldsymbol{r})$, siempre tiene que cumplirse con $c_0 = f(\boldsymbol{r}_0)$. Es preciso encontrar un conjunto coeficientes $c_i (i = 1, \ldots, n)$ que ajusten mejor a la función de aproximación $\tilde{f}$ con f. En este trabajo, tal conjunto de coeficientes es calculado por la técnica de mínimos cuadrados, utilizando los vértices de C_0. El problema consiste en solucionar el sistema lineal **Ac = b**, donde $C^T = (C_1, \ldots, C_n)$ es el vector a ser calculado, **A** es una matriz n x n simétrica cuyos elementos a_{ij} son dados por:

$$a_{ij} = \sum_{v_k \in C_0} P^{(i)}(\tilde{\boldsymbol{r}}) P^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}}) \; ; \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

y **b** es un vector cuyos componentes b_i son:

$$b_i = \sum_{v_k \in C_0} (f(\boldsymbol{r}_k) - f(\boldsymbol{r}_0)) P^{(i)}(\tilde{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}}) \tag{2}$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Consistencia

Para probar lo presentado anteriormente, se utilizó una ecuación Poisson cuya solución es conocida, y posteriormente es estudiada la convergencia del método. Utilizando para esto la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 f(x,y) = 6\,xy(x^2 + y^2 - 2)\,,$$

$$(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$$

bajo la condición de Dirichlet en la frontera:

$$f(x,y) = 0\,, \qquad (x,y) \in \partial D$$

cuya solución analítica es:

$$f(x,y) = xy(x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

Para generar la discretización de dominio se utilizó mallas no estructuradas generadas por el algoritmo de Chew (1989), con diferentes valores de . En la figura 2 es presentado el error calculado a partir de la expresión:

$$E = \left(\frac{1}{n_v} \sum_{j=1}^{n_v} \left| f(\boldsymbol{r}_j) - \bar{f}(\boldsymbol{r}_j) \right| \right)^{1/2}$$

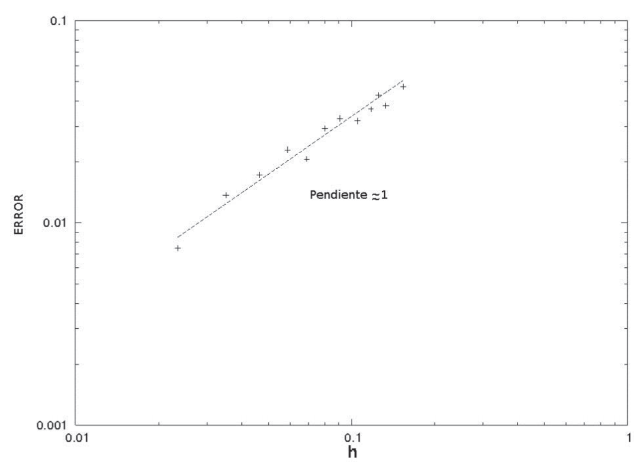

Figura 2. Resultado de la prueba de convergencia de MDFG en un problema elíptico

En la figura 3 se presenta la gráfica comparándose la solución analítica del problema planteado y la solución obtenida por el MDFG correspondiente a h= 0.117648

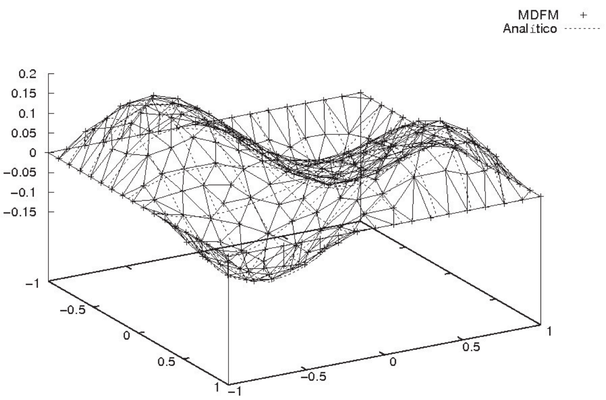

Figura 3. Solución analítica y numérica obtenida por MDFG con

Conclusiones.

En este trabajo se estudió el Método de Diferencias Finitas tipo Meshless, el cual permite calcular aproximaciones consistentes de las derivadas de una función sobre una colección de nodos esparcidos en un dominio. La utilización de estas aproximaciones para la solución de sistemas de EDP de clase elípticas mostro ser robusto y flexible. Se demostró la consistencia del método, ya que al emplear polinomios $W_0^n \in \mathcal{P}_n^2$ para solucionar elípticos bi-dimensionales como la ecuación de Poisson, se tienen errores de truncamiento para las aproximaciones de derivadas de primer y segundo orden con $\mathcal{O}(h^n)$ y $\mathcal{O}(h^{n-1})$ respectivamente. La regularidad geométrica de las células que discretiza el dominio garantiza la convergencia de la solución del MDFG para problemas elípticos como la ecuación de Poisson con condiciones de frontera de Dirichlet.

BIBLIOGRAFIA

1. Atluri, S.N., Zhu, T. (1998). A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach. *Comput. Mech., 22*, 117-127.

2. Babuska, I., Melenk, J.M. (1997). The partition of unity method. *Int. J. Numer. Meth. Eng., 40*, 727-758.

3. Belytschko, T., Krongauz, Y., Flening, D., Krysl, P. (1996). Meshless methods: an overview and recent developments. *Comput. Meth. Appli. Mech. Eng., 139*, 2-47.

4. Chew, L.P. (1989). Constrained delaunay triangulations. *Algorithmica 4*, (1), 1039-1053.

5. Duarte, C.A.M., Oden, J. T. (1996). H-P Cloud an H-P meshless method. *Numer. Meth. Partial Diff. Eqs., 12*, 673-705.

6. Gingold, R.A., Monaghan, J.J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical starts. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 181*, 375-389.

7. Glossler, A. (2001). Moving least-squares: a numerical differentation methods for irregularly spaced calculation points. *Sandia Technical Report, Sand 2001-1669*.

8. Jensen, P.S. (1972). Finite difference techniques for variable grids. *Comp. Structures, 2*, 17-29.

9. Liszka, T., Orkisz, J. (1980). The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers and Structures, 11*, 83-95.

10. Liu, W.K., Jun, S., Zhang, Y.F. (1995). Reproducing kernel particle methods. *Int. J. Nuner. Meth. Fluids, 20*, 1081-1106.

11. Luo, Y., Häussler, U. (2002). A generalized finite-difference method based on minimizing global residual. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 191*, 1421-1438.

12. Marshall, J.S.; Grand, J.R. (1997). A lagrangian vorticity collocation method for viscous, axisymmetric flows with and without swirl. *J. Comput Phys., 138*, 302-330.

13. Monaghan, J.J. (1998). An introduction to SPH. *Comput. Phys. Conm., 48*, 89-96.

14. Nayroles, B.; Touzot, G.; Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Comput. Mech., 10*, 307-318.

15. Perrone, N.; Kao, E.R. (1975). A general finite difference method for arbitrary mesh. *Computers and Structures., 5*, 647-664.

16. Sherpard. D. (1968). A two dimensional function for irregular spaced data. *ACM National Conference*.